FONKSİYONUN EKSTREMUM DEĞERLERİ

Bu bölümde verilen bir fonksiyonun türevinden yararlanarak bu fonksiyonun ekstremum değerlerini yani maksimum ve minimum değerlerinin ne olacağını ve bu değerleri aldığı noktaların nasıl belirleneceğini inceleyeceğiz.

Tanım: $f: D \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x \in D$ için $f(x) \leq f(c)$ olacak şekilde bir $c \in D$ varsa, bu c noktasına fonksiyonun mutlak maksimum noktası, $f(c)$ değerine de fonksiyonun mutlak maksimum değeri denir.

Benzer şekilde $\forall x \in D$ için $f(x) \geq f(c)$ olacak şekilde $c \in D$ noktasına fonksiyonun mutlak minimum noktası, $f(c)$ değerine de fonksiyonun mutlak minimum değeri denir.

❗ **UYARI :** Verilen bir fonksiyonun mutlak maksimum veya mutlak minimum değerleri olmak zorunda değildir. Yine bu değerlerden birisi olup, diğeri bulunmayabilir. Ayrıca fonksiyon mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini tanım kümesindeki birden çok noktada alabilirler. Şimdi bu söylediklerimizi örnekler üzerinde görmeye çalışalım.

Örnek: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ fonksiyonunu alalım.
Bu fonksiyon mutlak maksimuma ve mutlak minimuma sahip değildir. Gerçekten; bu fonksiyon $x=c\in\mathbb{R}$ noktasında mutlak maksimuma sahip olsaydı $\forall x\in\mathbb{R}$ için $f(x)\le f(c)=c$ olmalıydı Ancak $x=c+1\in\mathbb{R}$ için

$$f(x)=f(c+1)=c+1>f(c)=c$$ olacağından

hiçbir $c\in\mathbb{R}$ noktası mutlak maksimum noktası olamaz.

Benzer düşünce ile $c\in\mathbb{R}$ noktası mutlak minimum noktası olsaydı $\forall x\in\mathbb{R}$ için $f(x)\ge f(c)=c$ olmalıydı. Ancak

$$x=c-2\in\mathbb{R} \text{ için } f(x)=f(c-2)=c-2<f(c)=c$$

olacağından hiçbir $c\in\mathbb{R}$ noktası mutlak minimum nokta olamaz.

Örnek: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyon için $c=0$ noktası mutlak minimum noktasıdır. Gerçekten $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$f(x) = x^2 \geq f(0) = 0 \text{ dır.}$$

Böylece bu fonksiyonun mutlak minimum noktası 0 dır. Ancak mutlak maksimum noktası yoktur.

Eğer mutlak maksimum noktası olsaydı $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \leq f(c)$ olmalıydı. Ancak,

$$x = \sqrt{1+c^2} \text{ için } f(\sqrt{1+c^2}) = 1+c^2 > f(c) = c^2$$

olacağından bu fonksiyon mutlak maksimuma sahip değildir.

Örnek: $f:(0,2]\to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2$
fonksiyonunu alırsak $\forall x\in(0,2]$ için $f(x)\leq f(2)=4$ olduğundan $c=2$ fonksiyonun mutlak maksimum noktası, $f(2)=4$ fonksiyonun mutlak maksimum değeridir.

Ancak $\forall x\in(0,2]$ için $f(x)>0$ olup $f(x)\geqslant f(c)$ olacak şekilde $c\in(0,2]$ yoktur. Çünkü $f(0)=0$ ve $0\notin(0,2]$ dir. Böylece fonksiyonun mutlak minimumu yoktur.

Örnek: $f:(0,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ fonksiyonunu alırsak $0<f(x)<4$ olur. Ancak $f(c)=0 \Rightarrow c=0\notin(0,2)$ ve $f(c)=4 \Rightarrow c=\mp 2\notin(0,2)$ olup fonksiyonun mutlak maksimum ve mutlak minimum noktası yoktur.

Ekstremum değer teo için;

Bu teoremde f nin sürekli ve tanım kümesinin sınırlı aynı zamanda uç noktaları içerdiğine dikkat edilmelidir. Bunların sağlanmadığı durumda m ve M sayılarının varlığını garanti edemeyiz.

Yerel kelimesini kullanmamızın nedeni belirtilen özelliklerin c noktasının çok yakınında olduğunu, c dan biraz uzaklaşıldığında bu özelliklerin sağlanamaya-bileceğini vurgulamak içindir.

Sonuç: Örneklerden kolayca görülüyor ki; eğer fonksiyonun tanım kümesi sınırsız ise veya yarı açık aralık ise mutlak maksimum veya mutlak minimum bulunmayabilir.

TEOREM (Ekstremum Değer Teo): $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında mutlak maksimum değeri M ve mutlak minimum değeri m vardır.
Yani $\exists c_1, c_2 \in [a,b]$ için

$f(c_1) = m$ ve $f(c_2) = M$ olmak üzere

$m \leq f(x) \leq M$ sağlanır.

Verilen bir fonksiyonun tanım kümesine ait olan bir noktanın uygun bir komşuluğunda maksimum veya minimum değerleri bulunabilir. Bunlar yerel maksimum ve yerel minimum olarak ifade edilirler. Şimdi bu kavramları inceleyelim

Tanım: $f: D \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $c \in D$ olsun. c noktasının tanım kümesi dışına çıkmayan uygun bir komşuluğundaki tüm x noktaları için,

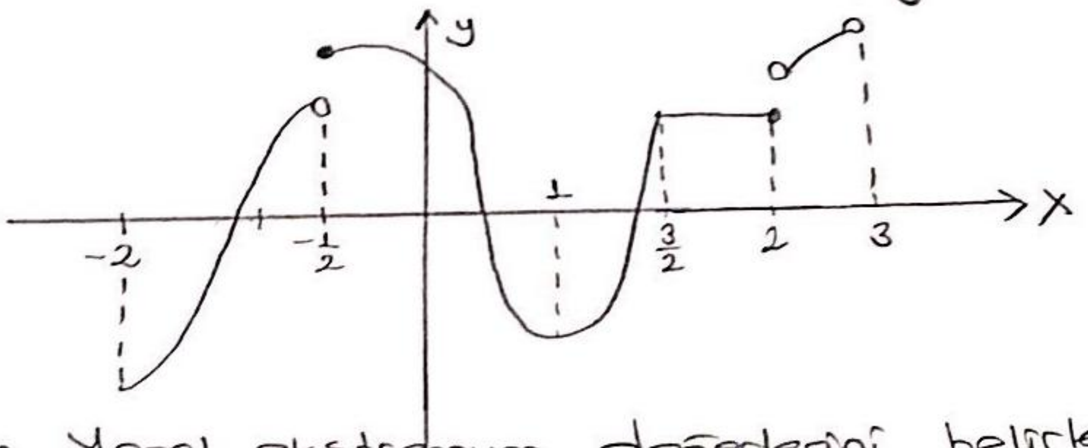
$f(x) \leq f(c)$ oluyorsa bu c noktasına yerel maksimum nokta, $f(c)$ değerine de yerel maksimum değer denir.

Benzer şekilde c noktasını içeren bir açık aralıktaki $\forall x \in D$ için $f(x) \geq f(c)$ ise bu c noktasına yerel minimum nokta, $f(c)$ değerine de yerel minimum değer denir.

Burada c nin bir δ komşuluğunu $U_\delta(c)$ ile gösterebiliriz

NOT: Bir fonksiyonun grafiği üzerinden mutlak veya yerel maksimum, minimum değerlerini belirleyebiliriz.

Örnek: $f: [-2, 3) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun grafiği



olsun. Yerel ekstremum değerlerini belirleyelim

$\forall x \in U_\delta(-2)$ için $f(x) \geq f(-2)$ olduğundan $x=-2$ yerel minimum noktasıdır.

$\forall x \in U_\delta(-\frac{1}{2})$ için $f(x) \leq f(-\frac{1}{2})$ olduğundan $x=-\frac{1}{2}$ yerel maksimum noktasıdır.

$x=1$ yerel minimum noktasıdır.

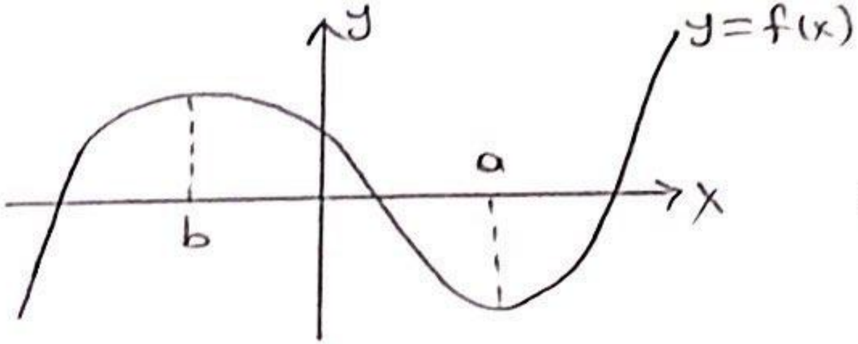
$\forall x \in U_\delta(\frac{3}{2})$ için $f(\frac{3}{2}) \geq f(x)$ olup $x=\frac{3}{2}$ yel maksimum noktasıdır.

$x=2$ yerel minimumdur.

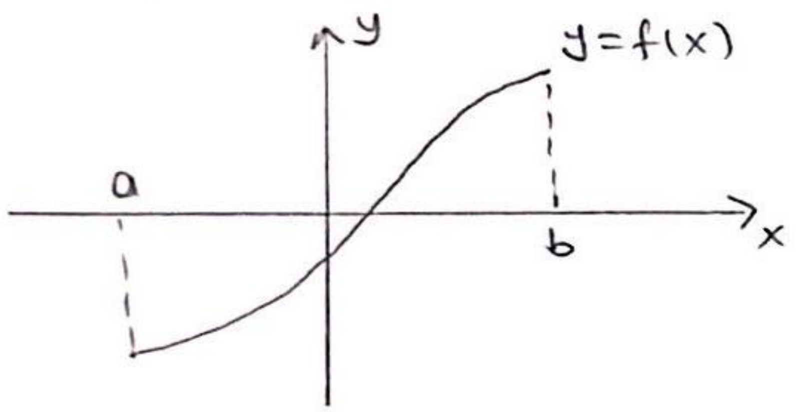
$x=3$ için $x \notin [-2,3)$ için ekstremum noktasından bahsedilemez.

UYARI: Yerel maksimum ve yerel minimum noktaları mutlak maksimum veya mutlak minimum noktası olmak zorunda değildir. Fakat mutlak maksimum ve minimum noktaları aynı zamanda yerel maksimum ve yerel minimumdur.

Örnek:



f(x) fonksiyonunun yerel maksimum noktası b, yerel minimum noktası a dır. Ancak mutlak maksimum ve minimum noktası yoktur.



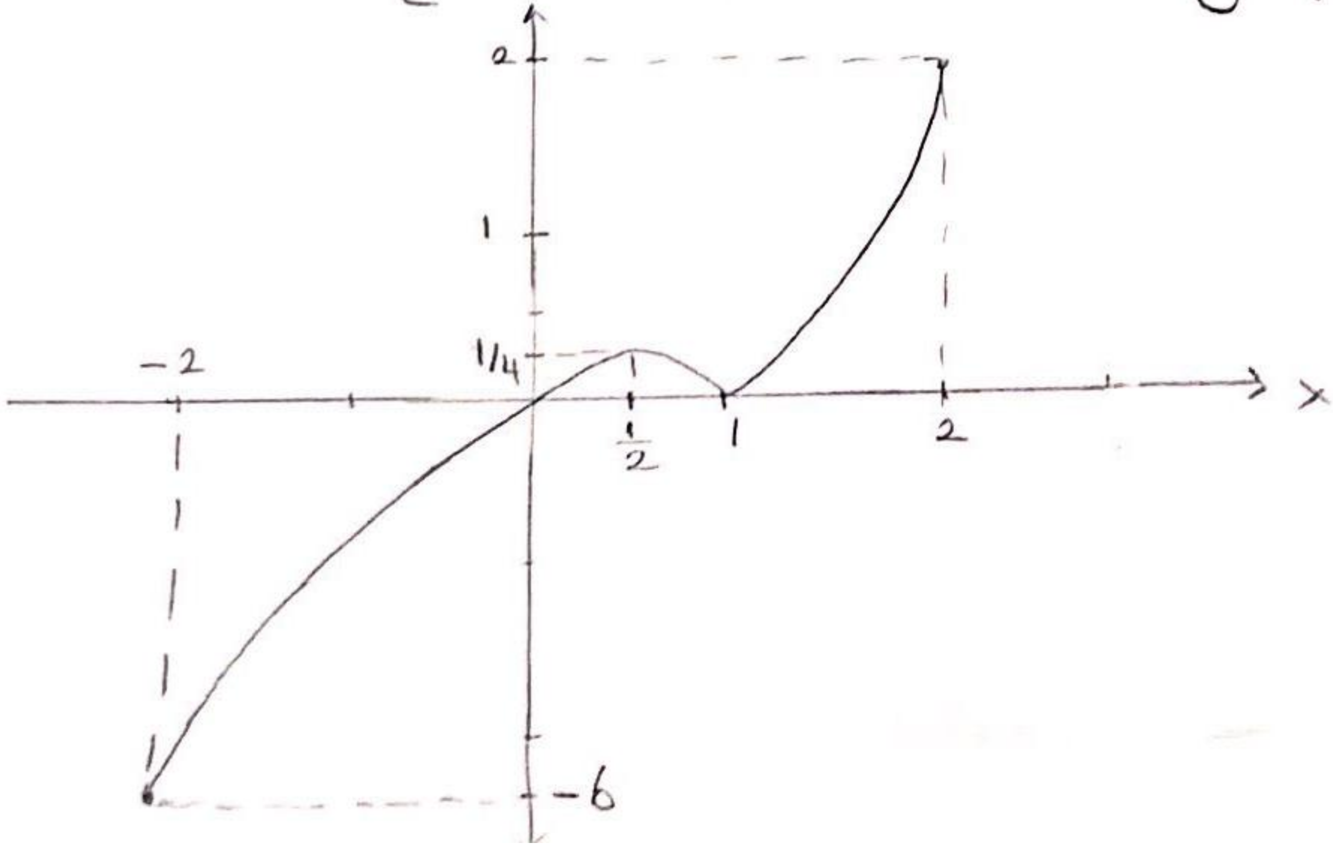
mutlak maksimum
yerel maksimum } b

mutlak minimum
yerel minimum } a

❗ UYARI: $[a,b]$ de tanımlı fonksiyonun aralığın uç noktalarındaki ekstremum değerleri incelenirken a noktasının sağında yani $a \le x < a+\delta$ ve b noktasının solunda yani $b-\delta < x \le b$ olan x noktaları için inceleme yapılır.

Örnek: $f:[-2,2]\to \mathbb{R}$, $f(x)=x|x-1|$ fonksiyonunun varsa mutlak veya yerel ekstremumlarını inceleyiniz

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x & , \quad x\geq 1 \\ -x^2+x & , \quad x<1 \end{cases}$$ fonksiyonunun grafiği;



Grafiğe göre $\forall x \in [-2,2]$ için $-6 \leq f(x) \leq 2$ olur. Böylece $x=-2$ mutlak minimum, $x=2$ mutlak maksimum nokta olur. Bunların dışında

$x=\frac{1}{2}$ noktası için $\forall x \in (0,1)$ olduğunda $f(x) \leq f(\frac{1}{2})$ olup $x=\frac{1}{2}$ noktası yerel maksimum noktasıdır.

$x=1$ noktası için $\forall x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ olduğunda $f(x) \geq f(1)$ olup $x=1$ yerel minimum noktasıdır.

Şimdi türev yardımıyla ekstremum noktaların nasıl belirlenebileceğini inceleyelim.